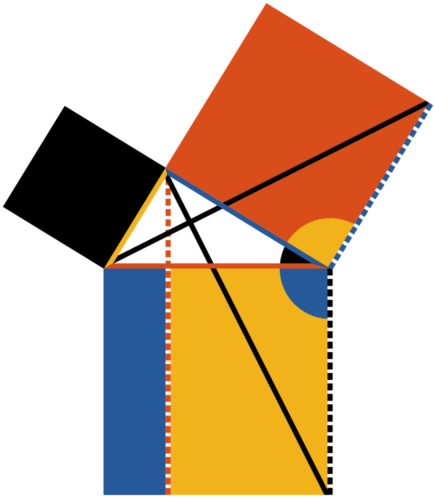
El primer libro de

Los elementos de Euclides



EN EL QUE SE UTILIZAN DIAGRAMAS Y SÍMBOLOS COLOREADOS ACOMPAÑANDO A LAS LETRAS PARA FACILITAR EL APRENDIZAJE

POR OLIVER BYRNE

Créditos y atribución

Los Elementos es una obra que reúne trabajos de matemáticos como Pitágoras, Eudoxo y Teeteto, entre otros. Euclides recopiló sus resultados y les dio forma sistemática aproximadamente hace 2300 años en Alejandría.

La edición a color fue publicada en Londres en 1847 por Oliver Byrne, bajo el título *The First Six Books of the Elements of Euclid*.

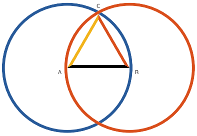
La versión en LaTeX fue desarrollada por Slyusarev Sergey en 2017, se encuentra disponible en Github en inglés y ruso. `https://github.com/jemmybutton/byrne-euclid`

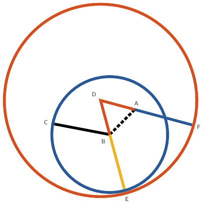
La traducción al español, así como diversas mejoras a la edición digital fueron realizadas en México por Carlos Villarreal en el 2026.

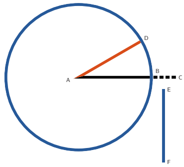
Desde la publicación de esta obra por Byrne, la notación matemática y el estilo de exposición de las demostraciones han evolucionado en los últimos siglos. Esta edición conserva la esencia de la obra original, pero con ligeras modificaciones para facilitar su lectura.

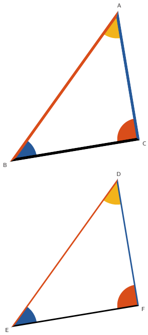
Espero que este libro llegue a muchas personas y contribuya a despertar en ellas el interés por la verdadera esencia de las matemáticas.

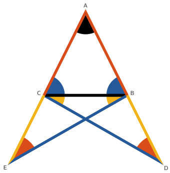
Índice

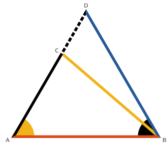


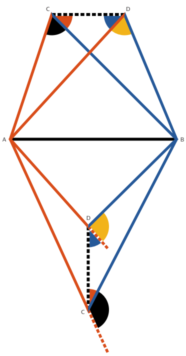


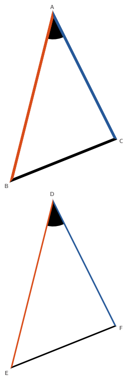


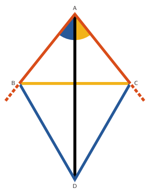


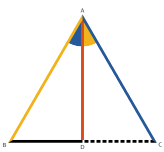


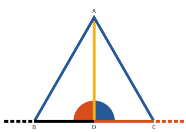


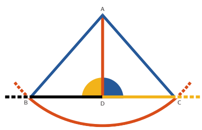


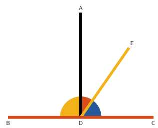


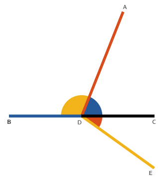


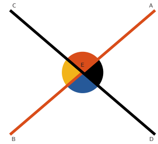


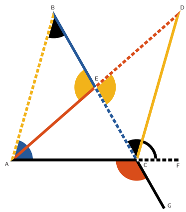


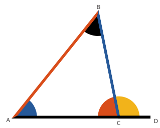


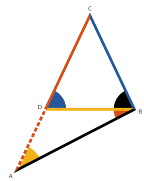

A
E
B
D
C

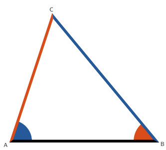

A
B
D
C
E

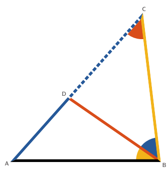

C
A
E
B
D

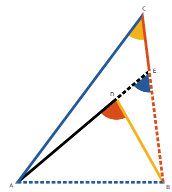

B
D
E
A
C
F
G

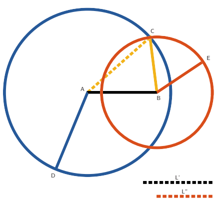

B
A
C
D

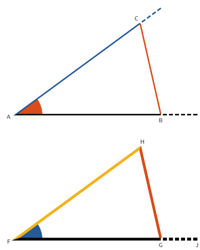

C
D
B
A

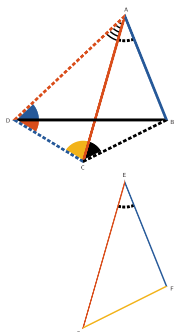

C
A
B

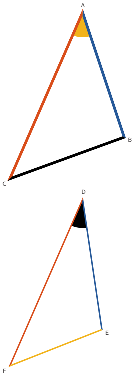

C
D
A
B

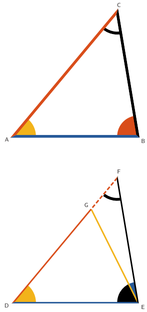

C
E
D
A
B

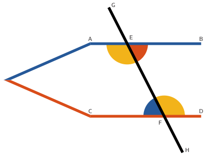

C
E
A
B
D

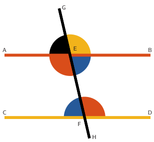

C
A
B
H
F
G
J

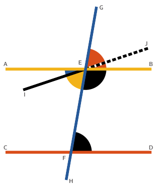

A
D
B
C
E
F
G

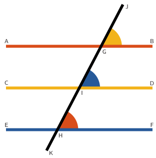

A
B
C
D
E
F

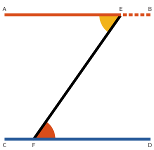

C
A
B
F
G
D
E

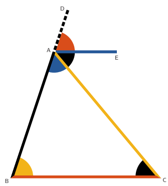

G
A
E
B
C
D
F
H

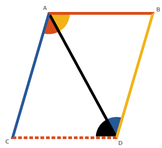

G
A
E
B
C
D
F
H

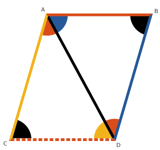

G
J
A
E
B
I
C
D
F
H

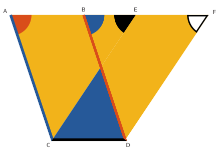

J
A
B
G
C
D
I
E
F
H
K

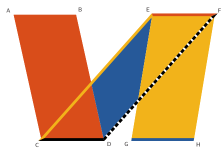

A
E
B
C
F
D

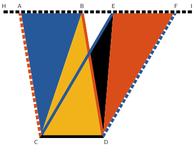

D
A
E
B
C

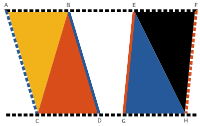

A
B
C
D

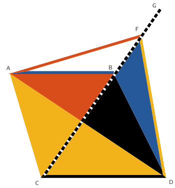

A
B
C
D

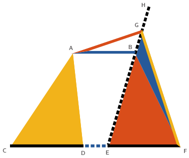

A
B
E
F
C
D

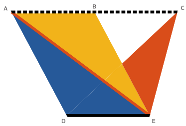

A
B
E
F
C
D
G
H

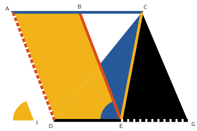


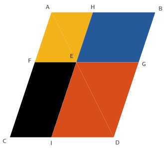


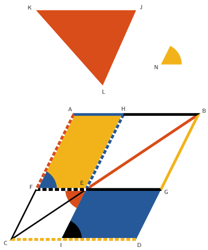


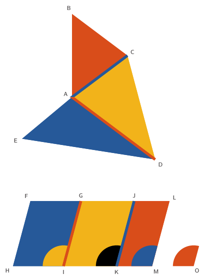


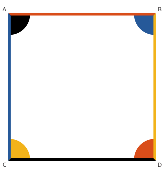


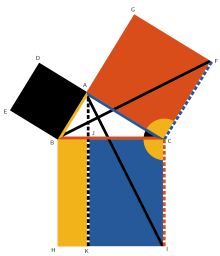


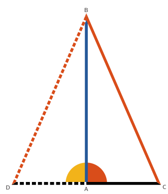












Introducción

Las artes y ciencias se han vuelto tan extensas, que facilitar su enseñanza es tan importante como extender sus límites. Las ilustraciones aquí expuestas, tal vez no acorten el tiempo de estudio, pero al menos lo harán más agradable. Este trabajo tiene un objetivo mayor que las meras ilustraciones; no se introducen colores con el propósito de entretener *con ciertas combinaciones de matiz y forma*, sino para facilitarle a la mente la búsqueda de la verdad y difundir el conocimiento. Si buscáramos autoridades para verificar la importancia y utilidad de la geometría, podríamos citar a todos los filósofos desde el día de Platón. Entre los griegos de la antigüedad, como en la escuela de Pestalozzi y otros en tiempos recientes, la geometría fue adoptada como el mejor gimnasio de la mente. De hecho, *Los Elementos* de Euclides se han convertido, por defecto, en la base de la ciencia matemática en todo el mundo civilizado. Pero esto no parece extraordinario, si consideramos que esta ciencia no solo es la mejor para despertar un espíritu investigador, elevar la mente y fortalecer el razonamiento, sino que también constituye la mejor introducción a la mayoría de las vocaciones útiles e importantes de la vida humana. La aritmética, la topografía, la hidrostática, la neumática, la óptica, la astronomía física, etc. dependen todas de las proposiciones de la geometría.

Sin embargo, todo depende de la primera introducción de cualquier ciencia a un alumno, aunque los mejores métodos rara vez se adoptan. Se presentan proposiciones a un estudiante, a quien, aunque tenga una comprensión suficiente, se le dice tan poco sobre ellas que al entrar en el umbral de la ciencia, se le da una predisposición muy desfavorable para el estudio de este tema tan fascinante; o "las formalidades y parafernalia del rigor se presentan de manera tan ostentosa, que casi ocultan su belleza. Las repeticiones interminables y desconcertantes, que no confieren mayor exactitud al razonamiento, hacen que las demostraciones sean complejas y oscuras, ocultando a la vista del estudiante la secuencia lógica de las ideas." Así se crea una aversión en la mente del alumno, y un tema tan importante para mejorar su razonamiento y darle el hábito de pensar con atención se degrada por un curso de instrucción seco, rígido y un ejercicio poco interesante para la memoria. Despertar tanto su curiosidad como las facultades latentes de las mentes jóvenes debería ser el objetivo de todo maestro; cuando existen buenos ejemplos de enseñanza, estos inspiran atención e imitación; cuando no los hay, los intentos de mejorar son escasos. El objetivo de esta obra es introducir un método de enseñanza en la geometría que ha sido aprobado por muchas personas de ciencia en este país, así como en Francia y América. Este método se apoya principalmente en el uso de la vista, uno de nuestros sentidos más eficaces para comprender y recordar ideas. Su importancia para fijar el conocimiento en la mente ya había sido señalada en el conocido principio expresado por Horacio.

Segnius irritant animos demissa per aurem
Quam quae sunt oculis subjecta fidelibus

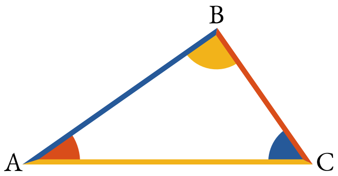
Lo que llega por el oído conmueve menos la mente
que aquello que se presenta ante los ojos.

Todo lenguaje se compone de signos que representan ideas, y los mejores signos son aquellos que cumplen su propósito con mayor precisión y rapidez. En la comunicación cotidiana, esos signos son las palabras: sonidos que transmiten significado, ya sea que lleguen directamente al oído o que, mediante la escritura, se perciban a través de la vista.

En la geometría, sin embargo, los diagramas no son simples signos, son parte esencial del propio contenido. Su propósito es mostrar las relaciones entre las magnitudes mediante un proceso de razonamiento llamado *demostración*. Tradicionalmente, estas demostraciones se han expresado mediante palabras, letras y diagramas negros sin color. No obstante, así como en muchas artes y ciencias el uso de símbolos y diagramas coloreados puede hacer más claro el proceso de razonamiento, también en la geometría el color puede ayudar a distinguir las partes de una figura y facilitar su comprensión.

El principio en que se basa es simple. En las demostraciones geométricas, las letras que se colocan junto a puntos, líneas u otras partes de un diagrama no son más que nombres arbitrarios que se utilizan para identificarlas durante el razonamiento. En este sistema, en cambio, las distintas partes de la figura se distinguen mediante colores; de esta manera, cada elemento se reconoce por sí mismo, ya que su forma y su color permiten identificarlo directamente en la demostración.

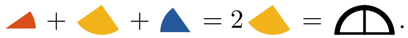
Para comprender mejor este método y las ventajas que ofrece, consideremos un triángulo rectángulo y expresemos algunas de sus propiedades mediante el uso de colores y mediante el método tradicional.



Algunas de las propiedades del triángulo rectángulo ABC, expresadas por el método generalmente empleado:

1. El ángulo BAC, junto con los ángulos BCA y ABC son iguales a dos ángulos rectos, o al doble del ángulo ABC.
2. El ángulo CAB sumado al ángulo ACB sera igual al ángulo ABC.
3. El ángulo ABC es mayor que cualquiera de los ángulos BAC o BCA.
4. El ángulo BCA o el ángulo CAB es menor que el ángulo ABC.
5. Si del ángulo ABC se toma el ángulo BAC, el residuo sera igual al ángulo ACB.
6. El cuadrado de AC es igual a la suma de los cuadrados de AB y BC.

Las mismas propiedades expresadas coloreando las diferentes partes:

1. 

   Es decir, el ángulo rojo sumado al ángulo amarillo sumado al ángulo azul, es igual al doble del ángulo amarillo e igual a dos ángulos rectos.

2. 

   En otras palabras, el ángulo rojo sumado al ángulo azul, es igual al ángulo amarillo.

3. 

   El ángulo amarillo es mayor que cualquiera de los ángulos rojo o azul.

4. 

   El ángulo rojo o azul es menor que el ángulo amarillo.

5. 

   En otros términos, el ángulo amarillo menos el ángulo azul es igual al ángulo rojo.

6. 

   Es decir, el cuadrado de la línea amarilla es igual a la suma de los cuadrados de las líneas azul y roja.

En las demostraciones orales, el uso del color ofrece una ventaja importante: permite que el ojo y el oído trabajen al mismo tiempo. Por esta razón, para la enseñanza de la geometría y de otras ciencias basadas en figuras, este método resulta especialmente adecuado para el trabajo en clase, como muestran los ejemplos presentados.

Cuando el texto se refiere a un diagrama, es más rápido y seguro identificar sus partes mediante sus formas y colores que hacerlo mediante letras. Además de ser más simple, este sistema favorece la concentración y evita una práctica perjudicial, aunque frecuente: que el estudiante memorice la demostración sin comprenderla plenamente. En cambio, el objetivo es que la razón, los hechos y las pruebas queden claramente impresos en el entendimiento.

De nuevo, al dar una conferencia sobre los principios o propiedades de las figuras, si mencionamos el color de la parte o partes a las que se hace referencia, como al decir, el ángulo rojo, la línea azul o líneas, etc., la parte o partes así nombradas serán vistas inmediatamente por toda la clase al mismo instante; no así si decimos el ángulo ABC, el triángulo PFQ, la figura EGKT, y así sucesivamente; porque las letras deben trazarse una por una antes de que los estudiantes organicen en sus mentes la magnitud particular a la que se refieren, lo que a menudo ocasiona confusión y error, así como pérdida de tiempo. Además, si las partes que se dan como iguales tienen los mismos colores en cualquier diagrama, la mente no se desviará del objeto que tiene ante sí; es decir, tal disposición presenta una demostración ocular de las partes que deben probarse como iguales, y el alumno retiene los datos durante todo el razonamiento. Pero cualesquiera que sean las ventajas del plan actual, si no se sustituye, siempre puede ser un poderoso auxiliar de los otros métodos, con el propósito de introducción, o de una reminiscencia más rápida, o de una retención más permanente por la memoria.

La experiencia de quienes han desarrollado métodos para facilitar la comprensión del conocimiento coincide en que las representaciones visuales como imágenes, grabados o diagramas coloreados se quedan grabadas en la mente con mayor facilidad que las palabras por sí solas. Curiosamente, los poetas parecen haber reconocido este principio con mayor claridad que los matemáticos; varios autores modernos han hecho referencia a esta forma visual de transmitir el conocimiento, y uno de ellos lo expresó de la siguiente manera:

Los sonidos que llegan al oído se desvanecen y mueren
en poco tiempo; pero aquello que entra por los ojos
perdura en la mente, pues la fiel mirada
graba el conocimiento con un rayo de luz.

Este puede considerarse, quizá, el único avance que la geometría elemental ha experimentado desde los tiempos de Euclides. Y si hubo geómetras destacados antes de él, su obra ha eclipsado por completo su memoria, hasta el punto de que muchos de estos aportes suelen atribuirse a su nombre, de manera similar a lo que ocurre con Esopo entre los autores de fábulas.

También es interesante notar que, así como los diagramas tangibles son el principal medio para enseñar geometría a las personas ciegas, este enfoque visual resulta igualmente adecuado para la enseñanza de personas sordas.

Sin embargo, es importante tener presente que el color no forma parte de las líneas, los ángulos ni las magnitudes, sino que se utiliza únicamente para identificarlos. Una línea matemática, entendida como longitud sin anchura, no puede tener color. No obstante, el encuentro entre dos colores en un mismo plano puede ayudar a representar de forma intuitiva lo que entendemos por una línea. En este sentido, cuando hablamos de una línea negra o una línea roja, nos referimos a la separación entre colores, no al color en sí.

Los colores y los diagramas coloreados pueden parecer al principio un método torpe para transmitir nociones adecuadas de las propiedades y partes de las figuras y magnitudes matemáticas, sin embargo, ofrecen un medio más refinado y extenso que cualquiera que se haya propuesto hasta ahora.

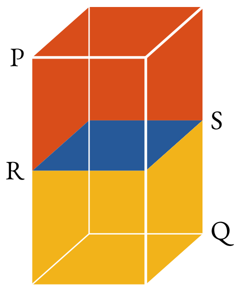
Aquí definiremos un punto, una línea y una superficie, y demostraremos una proposición para mostrar la verdad de esta afirmación.

Un punto es aquello que tiene posición, pero no magnitud; o un punto es solo posición, abstraído de la consideración de longitud, anchura y grosor. Quizás la siguiente descripción esté mejor pensada para explicar la naturaleza del punto matemático a aquellos que no han adquirido la idea, que la definición anterior.

Que tres colores se encuentren y cubran una porción del papel, donde se encuentran no es azul, ni es amarillo, ni es rojo, ya que no ocupa ninguna porción del plano, porque si lo hiciera, pertenecería a la parte azul, roja o amarilla; sin embargo, existe y tiene posición sin magnitud, de modo que con un poco de reflexión, esta unión de tres colores en un plano da una buena idea de un punto matemático.

Una línea es una longitud sin anchura. Con la ayuda de colores, casi de la misma manera que antes, se puede dar una idea de una línea.

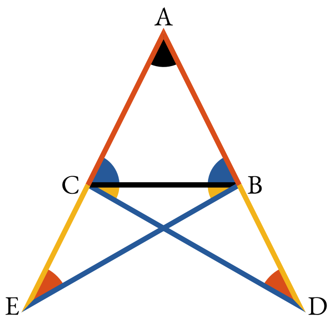
Que dos colores se encuentren y cubran una porción del papel; donde se encuentran no es rojo, ni es azul; por lo tanto, la unión no ocupa ninguna porción del plano, y por lo tanto no puede tener anchura, solo longitud: así podemos darnos una idea de lo que se entiende por una línea matemática. A efectos de ilustración, un color que difiera del color del papel, o del plano sobre el que está dibujado; de aquí en adelante, si decimos la línea roja, la línea azul o las líneas, etc. se entiende que son las uniones con el plano sobre el que están dibujadas.



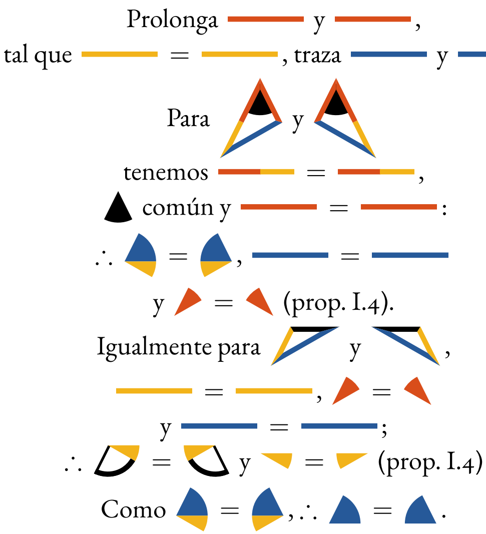
Una superficie es aquello que tiene longitud y anchura sin grosor.

Cuando consideramos un cuerpo sólido (PQ), percibimos de inmediato que tiene tres dimensiones: longitud, anchura y grosor; supongamos que una parte de este sólido (PS) es roja, y la otra parte (QR) amarilla, y que los colores son distintos sin mezclarse, la superficie azul (RS) que separa estas partes, o que es lo mismo, que divide el sólido sin pérdida de material, debe carecer de grosor, y solo posee longitud y anchura; esto aparece claramente por un razonamiento similar al que se acaba de emplear para definir, o más bien describir, un punto y una línea.

La proposición que hemos seleccionado para elucidar la manera en que se aplican los principios, es la quinta del primer libro.



En un triángulo isósceles ABC, los ángulos internos en la base ABC, ACB son iguales, y cuando los lados AB, AC se prolongan, los ángulos externos en la base BCE, CBD también son iguales.



Q. E. D.

Anexando las letras al diagrama.

Sean los lados iguales AB y AC prolongados a través de los extremos del tercer lado, la base BC, y en la parte prolongada BD se toma un punto D, tal que AE sea igual a AD (prop. I.3). Sean los puntos E y D, se conectan alternamente por líneas rectas DC y BE a los extremos del tercer lado del triángulo.

Para los triángulos DAC y EAB, los lados DA y AC son respectivamente iguales a EA y AB, y el ángulo A es común a ambos triángulos. Por lo tanto (prop. I.4) la línea DC es igual a BE, el ángulo ADC al ángulo AEB, y el ángulo ACD al ángulo ABE; si de las líneas iguales AD y AE se toman los lados iguales AB y AC, las prolongaciones BD y CE serán iguales. Por lo tanto en los triángulos BDC y CEB, los lados BD y DC son respectivamente iguales a CE y EB, y los ángulos D y E de estos lados también son iguales. Por lo tanto (prop. I.4) los ángulos DBC y ECB y las prolongaciones de los lados iguales AB y AC son iguales. También los ángulos DCB y EBC son iguales si esos iguales se toman de los ángulos DCA y EBA ya demostrados iguales, entonces los residuos, que son los ángulos ABC y ACB opuestos a los lados iguales, serán iguales.

Por lo tanto en un triángulo isósceles, etc.

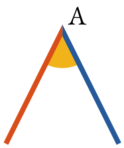
Q. E. D.

Nuestro objetivo es introducir este sistema en lugar de enseñar cualquier conjunto particular de proposiciones, hemos elegido los ejemplos anteriores fuera del orden habitual. Para su uso en escuelas y otros espacios educativos, los diagramas pueden dibujarse fácilmente con tizas de colores; en el estudio personal, los lápices de colores resultan especialmente prácticos.

Nos alegra observar que las matemáticas forman ya una parte importante de la educación, por lo que invitamos a quienes participan en la enseñanza a considerar este método, que ofrece una forma más clara y atractiva de transmitir el conocimiento, así como su posible desarrollo en trabajos futuros.

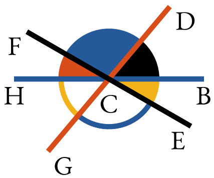
Para concluir, vale la pena señalar que, dado que la vista y el oído pueden ser estimulados de manera directa y simultánea —ya sea en una persona o en muchas—, la geometría y otras ramas de las matemáticas podrían enseñarse a gran escala con relativa facilidad. Esto contribuiría de manera significativa al progreso de la educación, pues ayudaría a las personas a aprender a pensar por sí mismas, y no solo a repetir ideas, que es uno de los principales problemas de los métodos educativos tradicionales.

Elucidaciones



La geometría tiene como objetos principales la exposición y explicación de las propiedades de la *figura*, y la figura se define como la relación que existe entre los límites del espacio. El espacio o la magnitud es de tres clases, *lineal*, *superficial* y *sólida*.

Los ángulos podrían considerarse apropiadamente como una cuarta especie de magnitud. La magnitud angular evidentemente consta de partes, y por lo tanto debe admitirse que es una especie de cantidad. El estudiante no debe suponer que la magnitud de un ángulo es afectada por la longitud de las líneas rectas que lo incluyen. El *vértice* de un ángulo es el punto donde se encuentran los *lados* del ángulo, como A.



Un ángulo se designa a menudo por una sola letra cuando sus lados son las únicas líneas que se encuentran en su vértice. Así, las líneas roja y azul forman el ángulo amarillo, que en otros sistemas se llamaría ángulo A. Pero cuando más de dos líneas se encuentran en el mismo punto, es necesario para evitar confusiones, emplear tres letras para designar un ángulo alrededor de ese punto, la letra que marca el vértice del ángulo se coloca siempre en el medio. Así, las líneas negra y roja que se encuentran en C, forman el ángulo azul, y ha sido usualmente denominado el ángulo FCD o DCF. Las líneas FC y CD son los lados del ángulo; el punto C es su vértice. De manera similar, el ángulo negro se designaría el ángulo DCB o BCD. Los ángulos rojo y azul sumados, o el ángulo HCF sumado a FCD, forman el ángulo HCD; y así de otros ángulos.

Cuando los lados de un ángulo se prolongan más allá de su vértice, los ángulos formados por ellos en ambos lados del vértice son llamados *opuestos por el vértice*, como los ángulos rojo y amarillo.

La superposición es el proceso por el cual una magnitud puede colocarse sobre otra, de modo que la cubra exactamente, o de modo que cada parte de cada una coincida exactamente con la otra.

Una línea se dice que es *prolongada*, cuando es extendida o su longitud es aumentada, y el aumento de longitud que recibe se llama *parte prolongada*, o su *prolongación*.

La longitud total de la línea o líneas que encierran una figura, se llama su *perímetro*. Los primeros seis libros de Euclides tratan solo de figuras planas. Una línea trazada desde el centro de un círculo hasta su circunferencia, se llama *radio*. El lado de un triángulo rectángulo, que es opuesto al ángulo recto, se llama *hipotenusa*. Un oblongo se define en el segundo libro, y se llama *rectángulo*. Se supone que todas las líneas consideradas en los primeros seis libros de los Elementos están en el mismo plano.

La *regla* y el *compás* son los únicos instrumentos cuyo uso está permitido por Euclides y en la geometría plana. Declarar esta restricción es el objetivo de los *postulados.*

Los *axiomas* de la geometría son ciertas proposiciones, cuya verdad se toma como cierta y no necesita ser demostrada.

Las *proposiciones* son aquellos resultados que se obtienen en geometría mediante un proceso de razonamiento. Hay dos tipos de proposiciones en geometría, *problemas* y *teoremas*.

Un *problema* es una proposición en la que se propone realizar algo, como dibujar una línea bajo ciertas condiciones dadas, trazar un círculo, o construir alguna figura, etc.

La *solución* del problema consiste en mostrar cómo construir el objeto requerido con la ayuda de la regla y el compás.

La *demostración* consiste en probar que el procedimiento descrito en la solución logra el resultado requerido.

Un *teorema* es una proposición en la que se afirma la verdad de algún principio. El cual debe ser deducido a partir de los axiomas, postulados, definiciones u otros resultados previamente ya establecidos. Mostrar esto es el objeto de la demostración.

Un *postulado* es una construcción que se admite sin demostración.

Un *axioma* es un principio que se admite sin demostración.

Un *corolario* es una consecuencia que se deduce inmediatamente de una proposición.

Un *escolio* es una nota u observación sobre una proposición que no constituye un resultado suficiente relevante para considerarse un *corolario*.

Un *lema* es una proposición auxiliar utilizada para demostrar otra más importante.

Símbolos y abreviaturas

$\therefore$ expresa la palabra *por lo tanto*.
$=$ expresa la palabra *igual*.
Este signo de igualdad puede leerse *igual a*, o *es igual a*, o *son iguales a*; pero la discrepancia con respecto a la introducción de los verbos auxiliares *es*, *son*, etc. no puede afectar el rigor geométrico.
$\neq$ significa *'no es igual'*.
$>$ significa *mayor que*.
$<$ significa *menor que*.
$\ngtr$ significa *no es mayor que*.
$\nless$ significa *no es menor que*.
$+$ se lee *más*, el signo de adición; cuando se interpone entre dos o más magnitudes, significa su suma.
$-$ se lee *menos*, significa la resta; y cuando se coloca entre dos cantidades, denota que la última se toma de la primera.
$\times$ este signo expresa el producto de dos o más números cuando se coloca entre ellos en aritmética y álgebra; pero en geometría se usa generalmente para expresar un *rectángulo*, cuando se coloca entre "dos líneas rectas que contienen uno de sus ángulos rectos." Un *rectángulo* también puede representarse colocando un punto entre dos de sus lados contiguos.
$: :: :$ expresa una *analogía* o *proporción*.
Así, si A, B, C y D representan cuatro magnitudes, y A tiene con B la misma proporción que C tiene con D, la proporción se escribe así:

$$A : B :: C : D\,, A : B = C : D\,, \frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Esta igualdad o proporción se lee:

Como A es a B, así es C a D,
A es a B, como C es a D.

$\parallel$ significa *paralelo a*.

$\nparallel$ significa *no es paralelo a*.

$\perp$ significa *perpendicular a*.

 significa *ángulo*.

 significa *ángulo recto*.

 significa *dos ángulos rectos*.

 o  designa un *punto*.

El cuadrado descrito sobre una línea se escribe ^{2}.

De la misma manera, el doble del cuadrado de una línea, se expresa por 2 · ^{2}.

def. significa *definición*.

post. significa *postulado*.

ax. significa *axioma*.

hyp. significa *hipótesis*.

Es la condición asumida o dada por sentada. Así, la hipótesis de la proposición dada en la Introducción, es que el triángulo es isósceles, o que sus lados son iguales.

const. significa *construcción*.

La *construcción* es el cambio realizado en la figura original, dibujando líneas, haciendo ángulos, describiendo círculos, etc. para adaptarla al argumento de la demostración o a la solución del problema. Las condiciones bajo las cuales se realizan estos cambios, son tan indiscutibles como las contenidas en la hipótesis. Por ejemplo, si hacemos un ángulo igual a un ángulo dado, estos dos ángulos son iguales por construcción.

Q. E. D. significa *Quod erat demonstrandum*. Lo que se quería demostrar.

[redacted]

Libro I

Definiciones

I.1

Un *punto* es aquello que no tiene partes.

I.2

Una *línea* es una longitud sin anchura.

I.3

Los extremos de una línea son puntos.

I.4

Una línea recta es aquella cuyos puntos se encuentran en una misma dirección.

I.5

Una superficie es aquella que sólo tiene longitud y anchura, sin espesor.

I.6

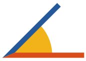
Los extremos de una superficie son líneas.

I.7

Una superficie plana es aquella que contiene una línea recta en cualquier lugar y dirección.

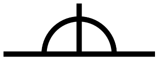
I.8

Un ángulo plano es la inclinación de dos rectas que se encuentran en un plano, y que no están sobre la misma recta.



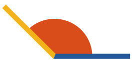
I.9

Un ángulo rectilíneo es la inclinación entre dos rectas que se encuentran y no están sobre la misma recta.



I.10

Cuando una línea recta forma ángulos iguales al cruzarse con otra, cada uno de los ángulos es llamado *ángulo recto*, y se dice que cada una de estas líneas es *perpendicular* a la otra.



I.11

Un ángulo obtuso es un ángulo mayor a un ángulo recto.

I.12

Un ángulo agudo es un ángulo menor a un ángulo recto.

I.13

Un borde o límite es el extremo de una figura.

I.14

Una figura es una superficie comprendida por un límite o varios límites.

I.15

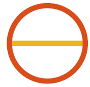
Un *círculo* es una figura plana, delimitada por una línea continua, llamada circunferencia; dentro de él tiene un punto desde el cual todas las líneas rectas dibujadas a su circunferencia son iguales.

I.16

El punto (desde el cual se dibujan las líneas iguales) es llamado el *centro* del círculo.

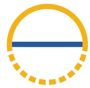
I.17

El *diámetro* de un círculo es una línea recta que pasa por el centro del círculo, y une dos puntos de su circunferencia.



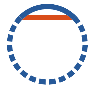
I.18

Un *semicírculo* es la figura contenida por el diámetro, y la parte del círculo delimitada por el diámetro.



I.19

Un segmento de un círculo es la figura contenida entre una línea recta y la parte de la circunferencia que corta.



I.20

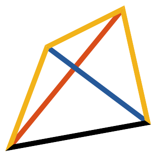
Una figura contenida solo por líneas rectas, se llama figura rectilínea.

I.21

Un *triángulo* es una figura rectilínea contenida por tres lados.

I.22

Un *cuadrilátero* es una figura limitada por cuatro lados. Las líneas rectas y que conectan los vértices de los ángulos opuestos de un cuadrilátero, son denominadas sus diagonales.



I.23

Un *polígono* es una figura rectilínea delimitada por más de cuatro lados.

I.24

Un triángulo equilátero es aquel que tiene todos sus lados iguales.

I.25

Un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales.

I.26

Un triángulo escaleno es aquel que no tiene lados iguales.

I.27

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto.

I.28

Un triángulo obtusángulo es aquel que tiene un ángulo obtuso.

I.29

Un triángulo acutángulo es aquel que tiene tres ángulos agudos.

I.30

De las figuras de cuatro lados, un cuadrado es aquel que tiene todos sus lados iguales y todos sus ángulos rectos.

I.31

Un rombo es aquel que tiene todos sus lados iguales, pero sus ángulos no son ángulos rectos.

I.32

Un oblongo o rectángulo oblongo es aquel que tiene todos sus ángulos rectos, pero no todos sus lados iguales.

I.33

Un romboide es aquel que tiene sus lados y ángulos opuestos iguales entre sí, pero no es equilátero ni sus ángulos son ángulos rectos.

I.34

Todas las demás figuras cuadriláteras se llaman trapecios.

I.35

Las líneas rectas paralelas son aquellas que están en el mismo plano, y que prolongadas continuamente en ambas direcciones, nunca se encontrarán.

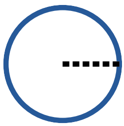
Postulados

I.1

Se puede trazar una línea recta desde cualquier punto a cualquier otro punto.

I.2

Se puede prolongar una línea recta indefinidamente.



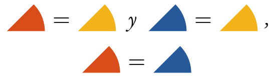
I.3

Se puede trazar un círculo con cualquier centro y radio.

Axiomas

I.1

Magnitudes iguales a otra magnitud son iguales entre sí.

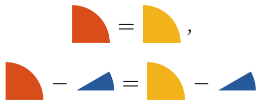


I.2

Si se suman iguales, las sumas serán iguales.

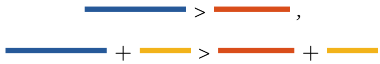
I.3

Si se restan iguales, su resta será igual.



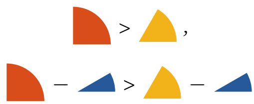
I.4

Si se suman iguales a desiguales, las sumas serán desiguales.



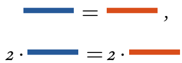
I.5

Si se restan iguales a desiguales, su resta será desigual.



I.6

Los dobles de magnitudes iguales son iguales.



I.7

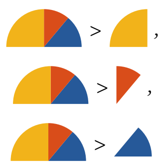
Magnitudes que son la mitad de la misma magnitud son iguales entre sí.

I.8

Magnitudes que coinciden entre sí, o que llenan exactamente el mismo espacio, son iguales.

I.9

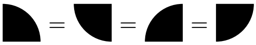
El todo es mayor que sus partes.



I.10

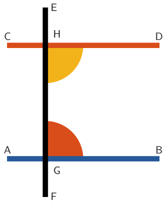
Dos líneas rectas no pueden contener un espacio.

I.11



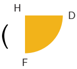
Todos los ángulos rectos son iguales.

I.12



Si dos líneas rectas (

) se encuentran con una tercera línea recta (

) de tal forma que los ángulos interiores que se forman en un mismo lado (

y 

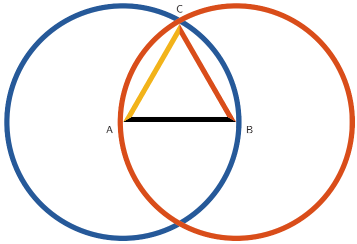
) suman menos de dos ángulos rectos, entonces esas dos líneas rectas se encontrarán al prolongarse por el lado donde los ángulos son menores.

El duodécimo axioma puede ser expresado en cualquiera de las siguientes maneras:

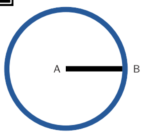
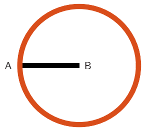
1. Dos líneas rectas que se encuentran no pueden ser ambas paralelas a una misma recta.
2. Si una recta corta a una de dos rectas paralelas, necesariamente también cortará a la otra.
3. Por un punto dado solo puede trazarse una única recta paralela a una recta dada.

Proposiciones

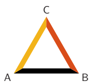
I.1 Prop. I. Prob.



En *una línea recta finita dada (*  *), trazar un triángulo equilátero.*

Traza  y  (post. I.3);

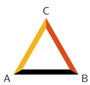
dibuja  y  (post. I.1).

Entonces  será equilátero.

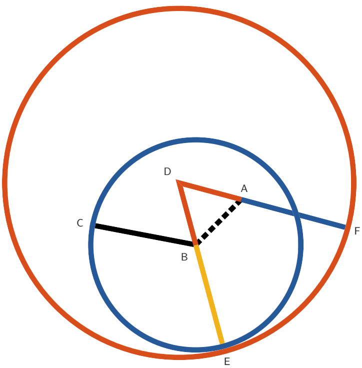
Porque  =  (def. I.15);

y  =  (def. I.15);

∴  =  (ax. I.1).

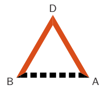
Por lo tanto  es el triángulo equilátero requerido.

Q. E. D.



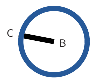
DESDE *un punto dado (A), dibujar una línea recta igual a una línea recta finita dada (BC).*

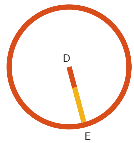
Traza AB (post. I.1),

construye 

(prop. I.1),

prolonga BD (post. I.2),

traza 

(post. I.3) y 

(post. I.3),

prolonga DA (post. I.2)

entonces AF es la línea requerida.

Porque ED = DF (def. I.15),

y BD = DA (const.),

∴ BE = AF (post. I.3),

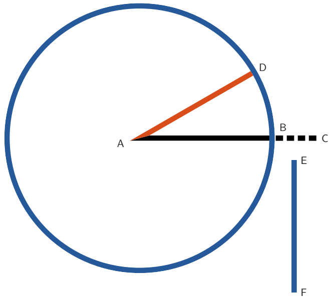
y como BC = BE = AF (def. I.15);

∴ AF trazada desde el punto (A),

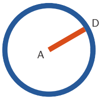
es igual a la línea BC.

Q. E. D.

D*E la mayor (**) de dos líneas rectas dadas, tomar una parte igual a la menor de ellas (**).*



Dibuja  =  (prop. I.2);

traza  (post. I.3),

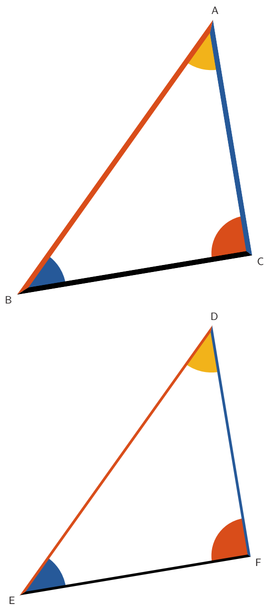
entonces  = .

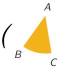
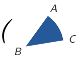
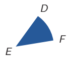
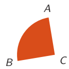
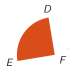
Porque  =  (def. I.15),

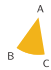
y  =  (const.);

∴  =  (ax. I.1).

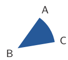
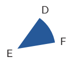
Q. E. D.

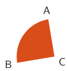
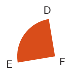


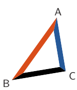
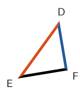
S*i dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales, (* *con*  *y*  *con* *) y los ángulos (* *con* *) contenidos por esos lados también son iguales; entonces sus lados (* *con* *) también son iguales: y los ángulos restantes son respectivamente iguales (* =  *y*  = *), es decir, los triángulos son iguales en todo aspecto.*

Sean dos triángulos, se colocan de tal manera, que el vértice de uno de los ángulos iguales,  o ; se superponga sobre el del otro, y  coincida con , entonces  coincidirá con  si se superpone.
Consecuentemente  coincidirá con , o dos líneas rectas encerrarán un espacio, lo cual es una contradicción a (ax. I.10), por lo tanto:

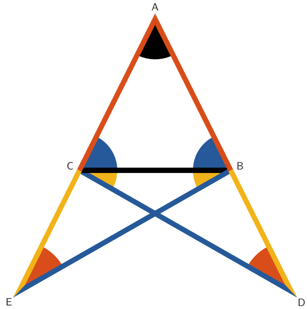
 = ,

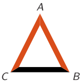
 = ,

y  = .

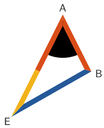
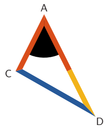
Como los triángulos  y  coinciden al superponerse, son iguales en todo aspecto.

Q. E. D.



EN *cualquier triángulo isósceles*  *los ángulos internos de la base son iguales y si se prolongan los lados iguales, los ángulos externos también son iguales.*

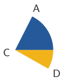
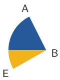
Prolonga  y  (post. I.2),
tal que  =  (prop. I.3);
traza  y .

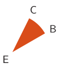
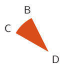
Entonces para los triángulos  y 

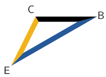
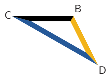
se tiene  =  (const.),

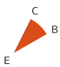
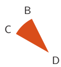
 comunes a ambos,

y  =  (hyp.)

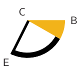
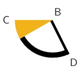
∴  = ,  =  y

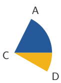
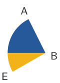
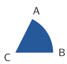
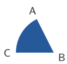
 =  (prop. I.4).

Igualmente para los triángulos  y 

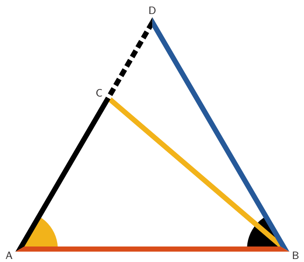
se tiene  = ,  =  y

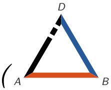
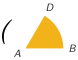
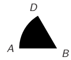
 = ,

∴  =  y  =  (prop. I.4)

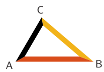
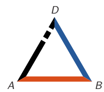
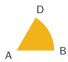
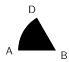
y como  = , ∴  =  (ax. I.3).

Q. E. D.

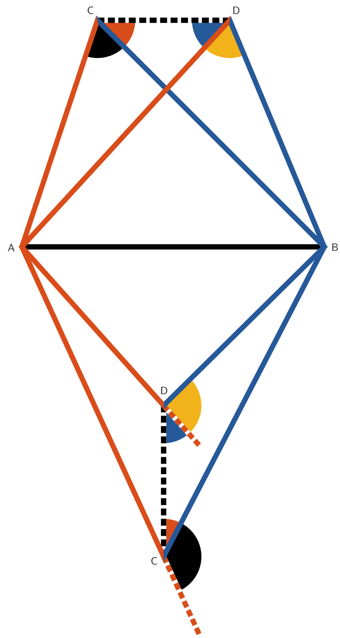


EN *cualquier triángulo (*  *) si dos ángulos (*  *y*  *) son iguales, los lados (*  *y*  *) opuestos a ellos son también iguales.*

Supongamos que los lados no son iguales,
entonces  es mayor que ,
se toma  =  (prop. I.3),
y traza .

Luego para  y ,
se tiene que  =  (const.),
 =  (hyp.) y  común,
∴ los triángulos son iguales (prop. I.4),
es decir una parte es igual al todo, lo cual es una contradicción (ax. I.9);
∴ ninguno de los lados  o  es mayor que el otro, es decir, son iguales.

Q. E. D.



EN *una misma base (A B) y del mismo lado de ella, no pueden existir dos triángulos distintos que tengan lados iguales (C A y D A, B C y B D).*

Cuando dos triángulos tienen la misma base, y están del mismo lado de ella, el vértice de uno de ellos está fuera del otro triángulo, dentro de él o sobre uno de sus lados.

Supongamos que es posible construir dos triángulos

tal que: { C A = D A ; B C = B D },

traza C D,

y C D A = C D A (prop. I.5)

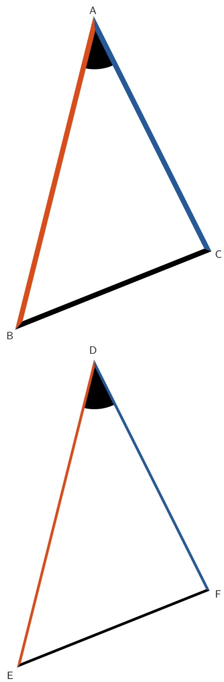
∴ C D B < C D A y

∴ C D B < C D B } lo cual es una contradicción,

por (prop. I.5) C D B = C D B

por lo tanto dos triángulos diferentes no pueden tener lados iguales sobre una misma base. Es decir, existe un único triángulo con dichos lados.

Q. E. D.



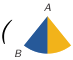
Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales (= y =) y también sus bases son iguales (=), entonces los ángulos (y) contenidos por sus lados iguales también son iguales.

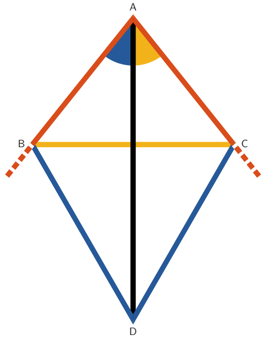
Si las bases son iguales *y* , se coloca una sobre la otra, de modo que los triángulos estén en el mismo lado de ellas, por lo que los lados iguales y , y son adyacentes, entonces el vértice de uno de los triángulos ( ) coincide con el vértice del otro ( ); pues si al suponerlos éstos no fueran coincidentes se contradiría la proposición anterior (prop. I.7).

Por lo tanto los lados y de un triángulo, coinciden con y del otro,

$$\therefore \quad = \quad .$$

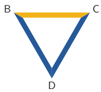
Q. E. D.

BISECAR *(dividir en dos partes iguales) un ángulo dado (*  *).*



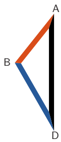
Toma  =  (prop. I.3)

traza  ,

construye  (prop. I.1),

traza  .

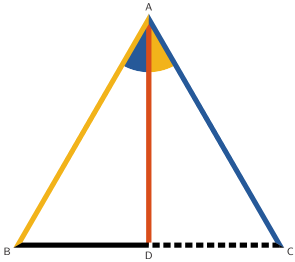
Como  =  (const.),

 es común a  y 

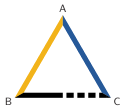
y  =  (const.),

∴  =  (prop. I.8).

Q. E. D.



BISECAR *una línea recta finita dada* ().

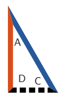
Construye  (prop. I.1),

traza  tal que  =  (prop. I.9).

Entonces  =  (prop. I.4).

Porque  =  (const.),

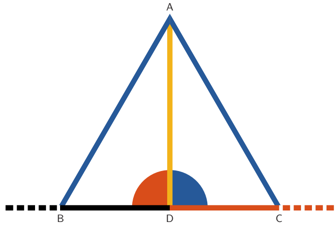
 =  (const.)

y  es común a  y 

∴  está bisecada.

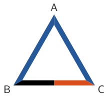
Q. E. D.

Desde *un punto dado(D), en una línea recta dada (BC), dibujar una perpendicular a la recta.*



Toma cualquier punto (C) en la línea,

toma rectas finitas tal que $DB = CD$ (prop. I.3),

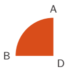
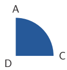
Construye  (prop. I.1).

traza AD y ésta será perpendicular a la línea.

Porque $AB = CA$ (const.),

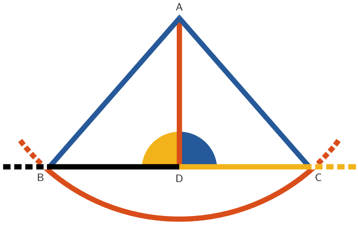
$CD = DB$ (const.)

y AD es común a  y 

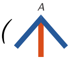
$\therefore$  $=$  (prop. I.8)

$\therefore AD \perp BC$ (def. I.10).

Q. E. D.



DIBUJAR *una recta perpendicular a una línea recta indefinida dada (* 

) desde un punto dado (

).

Desde el punto dado 

como centro y a una distancia 

capaz de extenderse al otro lado, se traza con el compás 

.
Toma 

= 

(prop. I.10),
traza 

, 

y 

,
entonces 

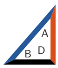
$\perp$ 

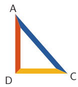
.

Por (prop. I.8) ya que 

= 

(const.),

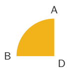

es común a 

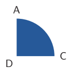
y 

y 

= 

(def. I.15),

$\therefore$ 

= 

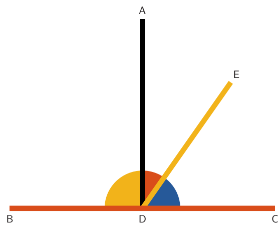
,

$\therefore$ 

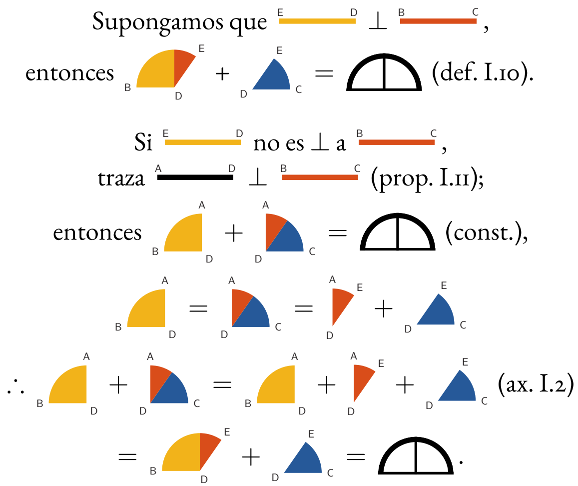
$\perp$ 

(def. I.10).

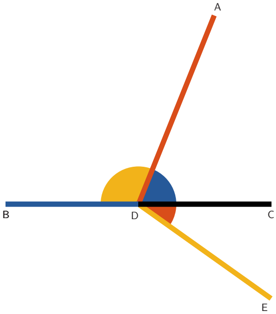
Q. E. D.



Cuando *una linea recta (E D) se encuentra con otra linea recta (B C) se forman ángulos; pueden ser dos ángulos rectos o la suma de ambos ángulos será igual a dos ángulos rectos.*



Q. E. D.



S*i dos lineas rectas (BD y DC), se encuentran con una tercera linea recta (AD) en el mismo punto y en lados opuestos, con ángulos adyacentes (BDA y ADC) iguales a dos ángulos rectos; entonces estas lineas forman una sola linea recta.*

Supongamos que DC no es la continuación de BD, entonces existe otra linea ED que es su continuación.

Entonces BDA + ADE =

pero por hipótesis BDA + ADC =

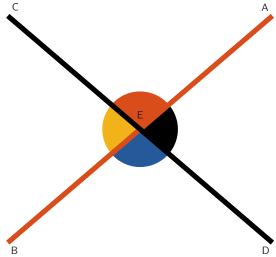
∴ ADE = ADC (ax. I.3)

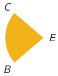
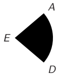
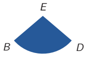
lo cual es una contradicción (ax. I.9).

∴ ED no es la continuación de BD, y lo mismo puede ser demostrado para cualquier otra línea recta excepto DC,

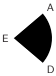
∴ DC es la continuación de BD.

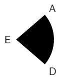
Q. E. D.



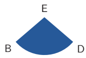
S*i dos lineas rectas (*  *y*  *) se intersectan, los ángulos opuestos*  *y* ,  *y*  *son iguales.*

 $+$  $=$  (prop. I.13)

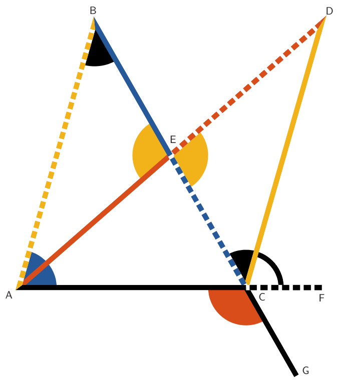
 $+$  $=$  (prop. I.13)

$\therefore$  $=$  (ax. I.3).

Con el mismo razonamiento se demuestra

 $=$ .

Q. E. D.



S*i el lado de un triángulo* (BAC) *es prolongado, el ángulo externo formado* (ECF) *es mayor que cualquiera de los ángulos internos* (BAC *o* BAC).

Toma BE = EC (prop. I.10);
traza AE tal que ED = AE;
traza CD.

Para BAE y EDC, se tiene que:

BE = EC,

BEA = DEC

y AE = ED (const.) y (prop. I.15),

∴ BAC = EDC (prop. I.4),

∴ ECF > BAC.

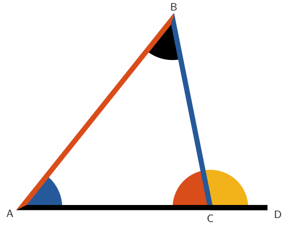
De la misma manera se puede demostrar que

si se extiende BC, ACG > BAC

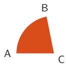
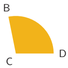
por lo tanto ECF = ACG > BAC.

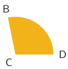
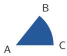
Q. E. D.

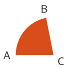
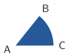
LA *suma de dos ángulos cualesquiera de un triángulo es menor que dos ángulos rectos.*



Prolonga ,

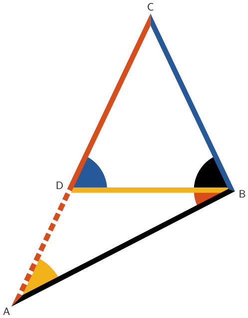
entonces  $+$  $=$ .

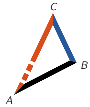
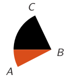
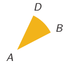
Como  $>$  (prop. I.16)

$\therefore$  $+$  $<$ .

Con el mismo razonamiento se puede demostrar que la suma de cualquier otro par de ángulos del triángulo es menor que dos ángulos rectos.

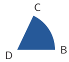
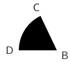
Q. E. D.

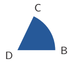
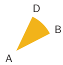


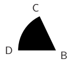
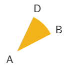
EN *cualquier triángulo*  *si un lado* () *es mayor que otro* (), *el ángulo opuesto al lado mayor es mayor que el ángulo opuesto al lado menor, es decir*  > .

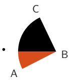
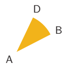
Toma  =  (prop. I.3),

traza .

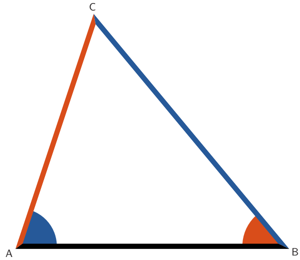
Entonces  =  (prop. I.5);

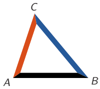
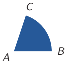
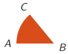
y como  >  (prop. I.16)

∴  > ,

∴  > .

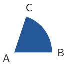
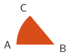
Q. E. D.

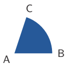
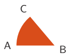


EN *en cualquier triángulo*  *si un ángulo*  *es mayor que otro*  *el lado*  *opuesto al ángulo mayor es mayor que el lado*  *opuesto al ángulo menor.*

Supongamos que  $\ngtr$ 
entonces debe ocurrir:

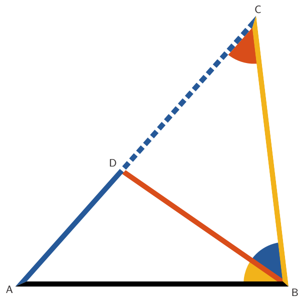
 $=$  ó  $<$  .

Si  $=$ 
entonces  $=$  (prop. I.5);
lo cual es contrario a la hipótesis.

Si  $<$  ,
entonces  $<$  (prop. I.18)
lo cual es contrario a la hipótesis.

$\therefore$  $>$  .

Q. E. D.



LA *suma de dos lados cualesquiera (DA y BD) de un triángulo ADB es mayor que el tercer lado (AB).*

Prolonga DA,

toma CD = BD (prop. I.3);

traza BC.

Entonces CD = BD (const.),

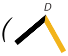
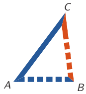
$\angle DBC = \angle ACB$ (prop. I.5).

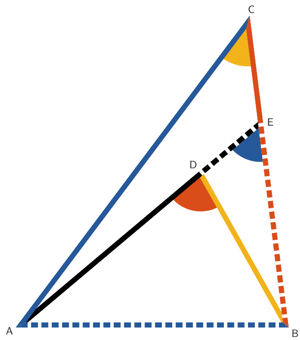
$\therefore \angle ABC > \angle ACB$ (ax. I.9)

$\therefore$ DA + CD > AB (prop. I.19)

$\therefore$ DA + BD > AB.

Q. E. D.

SI *desde cualquier punto (*  *) dentro de un triángulo*  *se trazan lineas rectas a los extremos de uno de los lados (AB), la suma de esas líneas será menor que la de los otros dos lados del triángulo, y el ángulo que forman será mayor.*



Prolonga AD,

CA + EC > AE (prop. I.20),

suma BE,

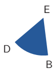
CA + CB > AE + BE (ax. I.4)

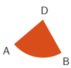
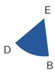
de la misma manera se demuestra:

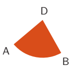
AE + BE > AD + BD,

∴ CA + CB > AD + BD,

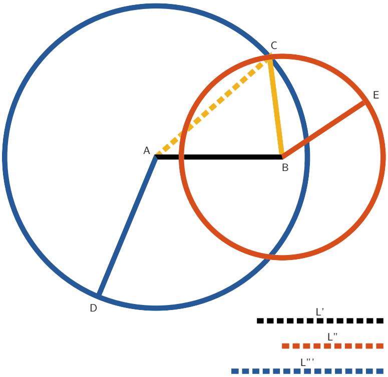
que era lo que se debía demostrar.

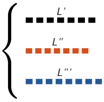
Asi mismo  >  (prop. I.16),

y también  >  (prop. I.16),

∴  >  .

Q. E. D.



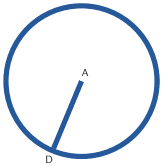
Dadas *tres lineas rectas*  *tal que la suma de dos cualesquiera es mayor que la tercera, construir un triángulo cuyos lados sean respectivamente iguales a las lineas dadas.*

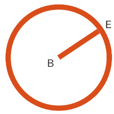
Toma  =  (prop. I.3).

Traza  = 

y  =  (prop. I.2).

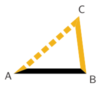
Con  y  como radios, traza



y


(post. I.3);

traza  y  ,

entonces  es el triángulo requerido.

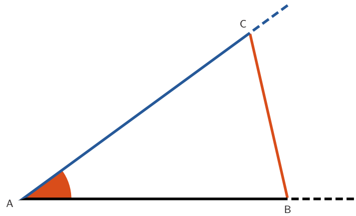
Porque  =  ,

 =  =  ,

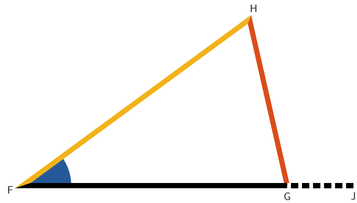
y  =  =  . (const.)

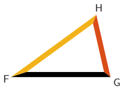
Q. E. D.

Desde un punto dado ( *) en una linea recta dada (*  *), construir un ángulo igual a un ángulo dado (*  *).*



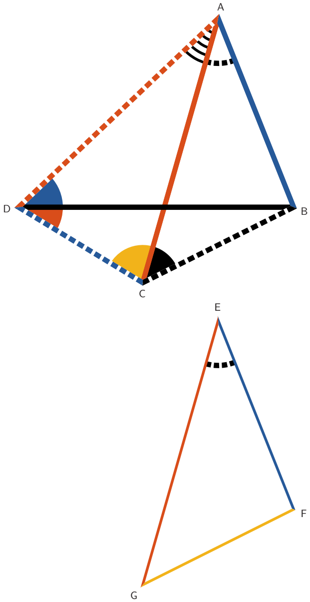
Traza  desde cualquier punto en cada uno de los lados del ángulo dado.



Construye  (prop. I.22) tal que  = ,  =  y  = .

Entonces  =  (prop. I.8).

Q. E. D.

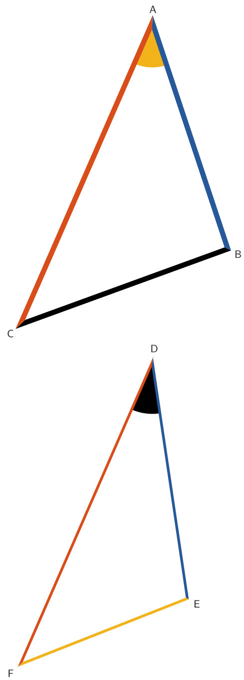


Si un triángulo tiene dos lados respectivamente iguales a dos lados de otro (AB con EF y AD con GE), y uno de los ángulos ($\angle DAB$) contenido por los lados iguales es mayor que el otro ($\angle GEF$), el lado opuesto al ángulo mayor (DB) es mayor que el lado opuesto al ángulo menor (FG).

Traza $\angle CAB = \angle GEF$ (prop. I.23),
y CA = GE (prop. I.3),
traza CD y BC.
Como CA = AD (ax. I.1) , (hyp.) y (const.)
∴ $\angle ADC = \angle ACD$ (prop. I.5)
entonces $\angle BDC < \angle ACD$,
∴ $\angle BDC < \angle BCD$,
∴ DB > BC (prop. I.19)
como BC = FG (prop. I.4)
∴ DB > FG.

Q. E. D.

Si un triángulo tiene dos lados (A B y C A) respectivamente iguales a dos lados (D E y F D) de otro triángulo, pero con bases diferentes, el ángulo creado por la base mayor (B C), es mayor que el ángulo creado por la base menor (E F).



Se tienen tres opciones:

A C B = D F E , A C B > D F E , A C B < D F E

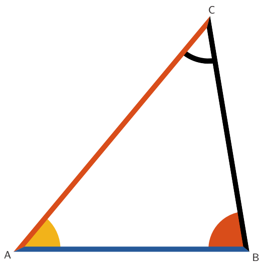
Supongamos que A C B = D F E ,
entonces C B = F E (prop. I.4)
lo cual contradice la hipótesis.

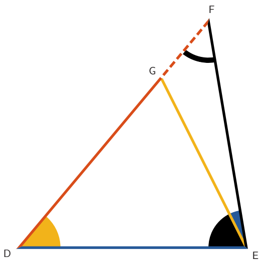
Supongamos que A C B < D F E ,
entonces C B < F E (prop. I.24),
lo cual contradice la hipótesis.

∴ A C B > D F E .

Q. E. D.

SI dos triángulos tienen dos ángulos respectivamente iguales entre si (A C B = D F E *y* A C B = D F E*), y un lado es igual a un lado del otro, los lados y ángulos restantes son respectivamente iguales entre sí.*





Caso I.

Sean AB y DE los lados iguales que están entre los ángulos iguales, entonces CA = DF.

Supongamos que uno de los lados es mayor que el otro:

DF > CA,

toma CA = GD y traza EG.

Para A C B y D G E tenemos:

CA = GD, A C B = D F E,

AB = DE;

∴ A C B = D G E (pr. 4.)

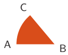
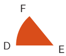
y como A C B = D F E (hyp.)

∴ D G E = D F E lo cual es una contradicción.

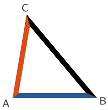
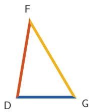
Por lo tanto ninguno de los lados CA y DF es mayor que el otro, es decir son iguales.

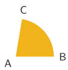
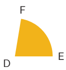
∴ BC = EF y A C B = D F E (prop. I.4).

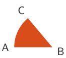
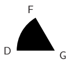
Caso II.

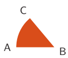
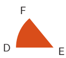
De una manera similar, toma  = , como los lados opuestos a los ángulos iguales  y .

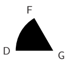
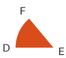
Supongamos que  > , entonces toma  =  y traza .

Entonces para  y  se tiene que:  = ,  = ,

 = 

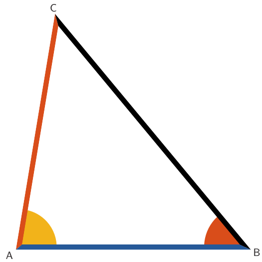
∴  =  (prop. I.4)

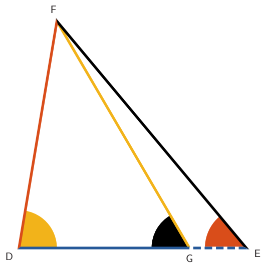
y como  =  (hyp.)

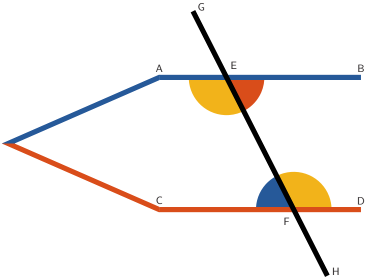
∴  =  lo cual es una contradicción (prop. I.16).

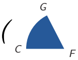
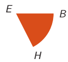
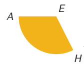
Entonces ninguno de los lados  y  es mayor que el otro, por lo tanto deben ser iguales. Se deduce por (prop. I.4) que los triángulos son iguales en todos los aspectos.

Q. E. D.



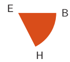
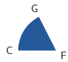


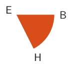
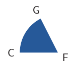


Si una línea recta () se encuentra con otras dos líneas rectas ( y ) y con ellas forma ángulos alternos ( y ;  y ) iguales, entonces estas dos líneas rectas son paralelas.

Supongamos que  $\nparallel$ ,

por lo que se encontrarán en algún punto (),

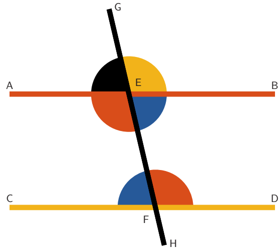
entonces  >  (prop. I.16),

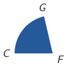
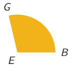
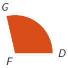
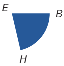
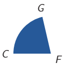
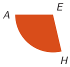
pero  =  (hyp.), lo cual es una contradicción.

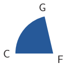
De la misma manera se puede demostrar que no pueden encontrarse en algún otro punto del otro lado,

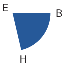
∴  $\parallel$ .

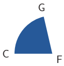
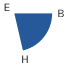
Q. E. D.



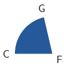
S*i una linea recta (*  *) corta a otras dos lineas rectas (*  *y*  *) de tal forma que el ángulo externo es igual al ángulo interno y opuesto en el mismo lado de la linea que corta (es decir*  =  ,  =  *), o si los dos ángulos internos en el mismo lado (*  *y*  ,  *y*  *) son iguales a dos ángulos rectos, entonces las dos lineas rectas son paralelas.*

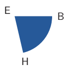
En primer lugar, si  =  ,

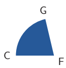
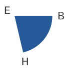
entonces  =  (prop. I.15),

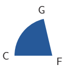
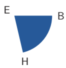
∴  = 

∴  ||  (prop. I.27).

En segundo lugar, si  +  =  ,

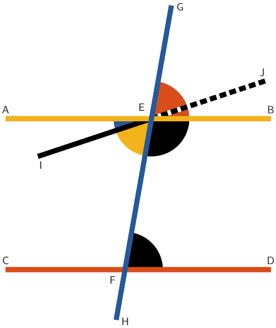
entonces  +  =  (prop. I.13),

∴  +  =  +  (ax. I.3)

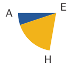
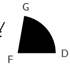
∴  = 

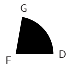
∴  ||  (prop. I.27).

Q. E. D.



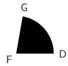
UNA *linea recta (**) que corta a dos lineas paralelas (* *y* *), hace que los ángulos alternos sean iguales entre si; tambien el ángulo externo resulta ser igual al interno y opuesto en el mismo lado; y los dos ángulos internos en el mismo lado resultan ser iguales a dos ángulos rectos.*

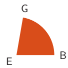
Supongamos que  $\neq$ ,

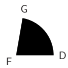
traza  tal que  $=$  (prop. I.23).

$\therefore$  $\|$  (prop. I.27),

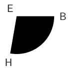
es decir, dos lineas rectas que se intersectan son paralelas a la misma linea recta, lo cual es una contradicción (ax. I.12).

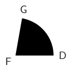
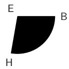
Por lo tanto  $=$ ,

y como  $=$  (prop. I.15);

$\therefore$  $=$ ,

el ángulo externo es igual al interno y opuesto en el mismo lado.

Suma  a la igualdad,

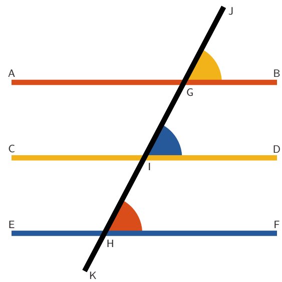
entonces  $+$  $=$  $=$ 

(prop. I.13).

Es decir, los dos ángulos internos en el mismo lado de la línea que corta son iguales a dos ángulos rectos.

Q. E. D.

L INEAS *rectas (AB y EF) que son paralelas a la misma linea recta (CD), son paralelas entre si.*



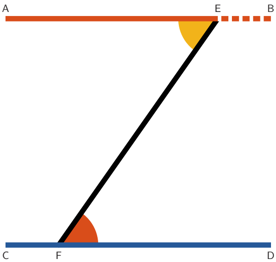
Sea JK tal que intersecta $\left\{ \begin{matrix} AB \\ CD \\ EF \end{matrix} \right\}$;

Entonces, GJB = IJD = HJF (prop. I.29),

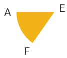
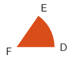
$\therefore$ GJB = HJF

$\therefore$ AB $\parallel$ EF (prop. I.28).

Q. E. D.

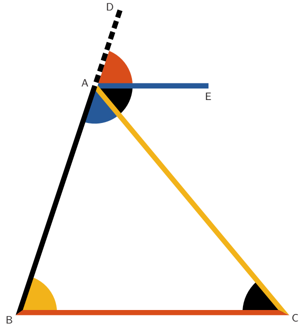


DESDE *un punto dado*  *trazar una linea recta paralela a una linea recta dada (**).*

Traza  desde el punto 
a cualquier punto  en ,
construye  =  (prop. I.23),
entonces  ||  (prop. I.27).

Q. E. D.

Si *cualquier lado ( ) de un triángulo es prolongado, el ángulo externo ( ) es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos (y), y la suma de los tres ángulos internos de cualquier triángulo son iguales a dos ángulos rectos.*



Desde el punto traza

|| (prop. I.31).

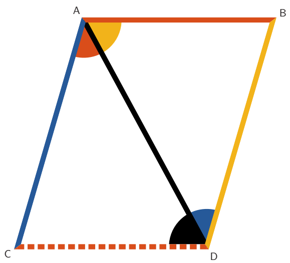
Entonces { = , = } (prop. I.29),

∴ + = (ax. I.2),

∴ + + = =

(prop. I.13).

Q. E. D.



Si dos lineas rectas (AC y BD) unen los extremos adyacentes de dos lineas rectas iguales y paralelas (AB y CD), entonces las lineas rectas son iguales y paralelas.

Traza la diagonal AD.

como AB = CD (hyp.)

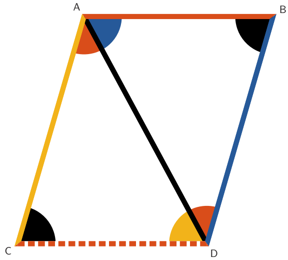
entonces ABD = ADC (prop. I.29)

y como AD es común a ACD y ABD;

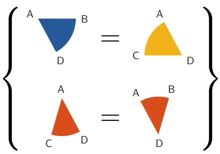
∴ AC = BD y BDA = ACD (prop. I.4);

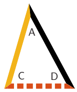
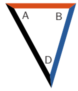
∴ AC ∥ BD (prop. I.27).

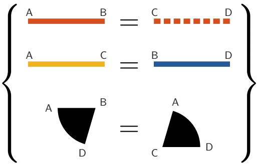
Q. E. D.

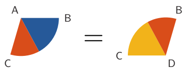


Los *lados y ángulos opuestos de cualquier paralelogramo son iguales, y la diagonal (**) lo divide en dos partes iguales.*

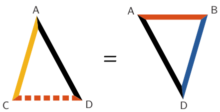
Como  (prop. I.29)

y  es común a  y ,

$\therefore$  (prop. I.26)

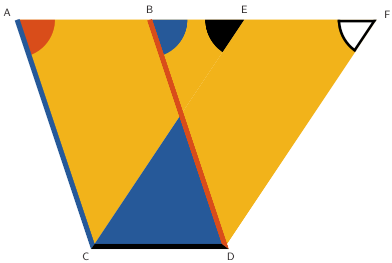
y  (ax. I.2).

Por lo tanto, los lados y los ángulos opuestos de cualquier paralelogramo son iguales,

y como  (prop. I.4),

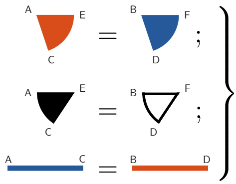
la diagonal divide al paralelogramo en dos partes iguales.

Q. E. D.



PARALELOGRAMOS *con la misma base y entre las mismas paralelas tienen áreas iguales.*

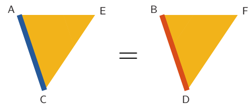
Debido a que son paralelas:

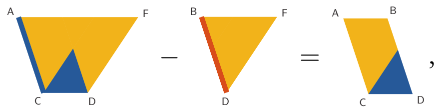
y 

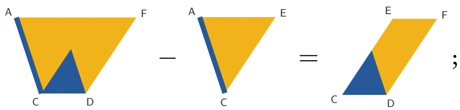
(prop. I.29)

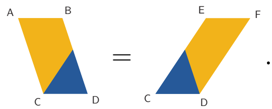
(prop. I.29)

(prop. I.34).

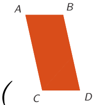
Entonces  (prop. I.8)

∴ 

y 

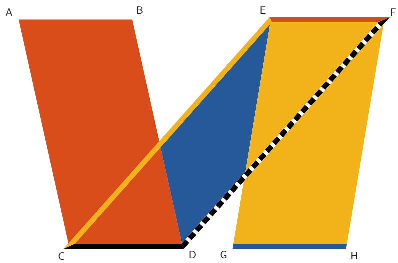
∴ 

Q. E. D.

P ARALLELOGRAMOS (

y 

) *con bases iguales, y entre las mismas paralelas, son iguales.*



Traza 

y 

entonces 

= 

= 

(prop. I.34) y (hyp.);

∴ 

= 

y 

∥ 

;

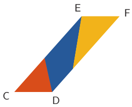
∴ 

= 

y 

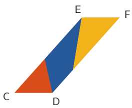
∥ 

(prop. I.33)

Entonces 

es un paralelogramo,

y como 

= 

= 

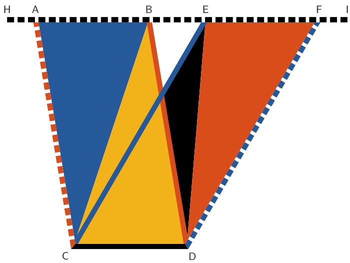
(prop. I.35)

∴ 

= 

(ax. I.1).

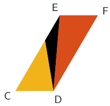
Q. E. D.



TRIÁNGULOS  *y*  *con la misma base (*  *) y entre las mismas paralelas son iguales.*

Traza  $\parallel$ 
 $\parallel$  (prop. I.31)

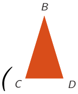
traza .

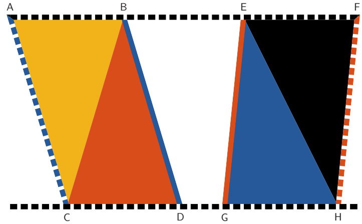
Como  y  son paralelogramos sobre la misma base y entre las mismas paralelas, por lo tanto son iguales. (prop. I.35)

$\therefore$  $= 2$ 
 $= 2$  (prop. I.34)

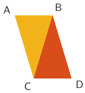
$\therefore$  $=$ .

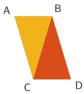
Q. E. D.

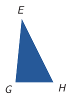
TRIÁNGULOS *(*  *y*  *) sobre bases iguales y entre las mismas paralelas son iguales.*

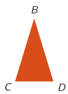


Traza  ‖ 
y  ‖  } (prop. I.31)

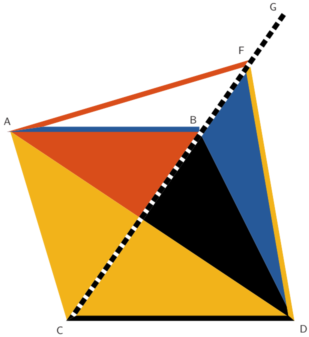
 =  (prop. I.36);

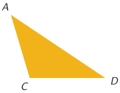
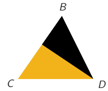
como  = 2  (prop. I.34),

y  = 2  (prop. I.34),

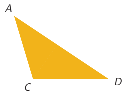
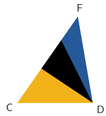
∴  =  (ax. I.7).

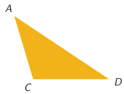
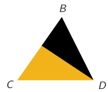
Q. E. D.

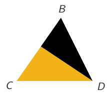
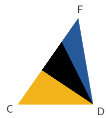


TRIÁNGULOS *iguales*  *y*  *con la misma base (*CD*) y del mismo lado de ella, están entre las mismas paralelas.*

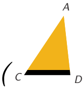
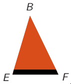
Supongamos que AB ∦ CD,
traza AF ∥ CD (prop. I.31) hasta CG
y traza DF.
Como AF ∥ CD (const.)

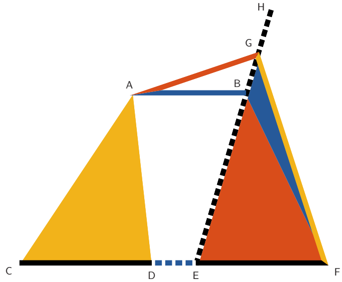
entonces  =  (prop. I.37);

además  =  (hyp.);

∴  = ,
es decir, una parte es igual al todo, lo cual es una contradicción (ax. I.9).
∴ AF ∦ CD.
De la misma manera se puede demostrar para cualquier otra línea excepto AB,
∴ AB ∥ CD.

Q. E. D.

TRIÁNGULOS *iguales (*  *y*  *) sobre bases iguales y del mismo lado de ellas, están entre las mismas paralelas.*

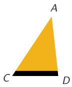


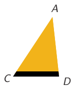
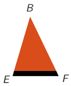
Supongamos que  ∦ ,

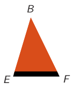
traza  ∥  (prop. I.31) hasta 

y traza .

Como  ∥  (const.)

entonces  = 

y  =  (hyp.);

∴  = 

una parte es igual al todo,

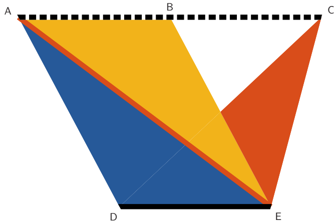
lo cual es una contradicción (ax. I.9).

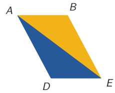
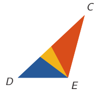
∴  ∦ .

De la misma manera se puede demostrar para cualquier otra línea excepto .

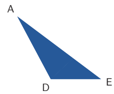
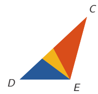
∴  ∥ .

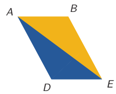
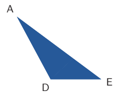
Q. E. D.

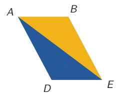
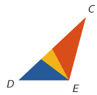


Si un paralelogramo  *y un triángulo*  *están sobre la misma base* DE *y entre las mismas paralelas* AC *y* DE*, el paralelogramo es el doble del triángulo.*

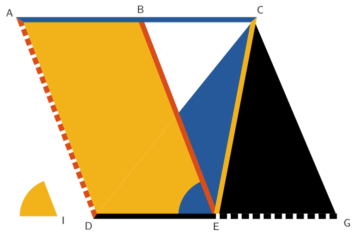
Traza la diagonal AE.

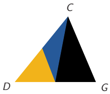
Entonces  =  (prop. I.37)

 = 2  (prop. I.34)

∴  = 2  .

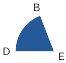
Q. E. D.



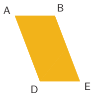
CONSTRUIR *un paralelogramo igual a un triángulo dado*  *con un ángulo igual a un ángulo dado* .

Toma  =  (prop. I.10),

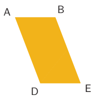
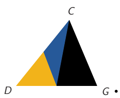
traza .

Construye  =  (prop. I.23),

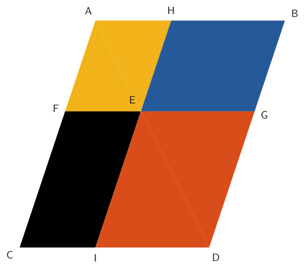
traza {  ∥  ;  ∥  } (prop. I.31),

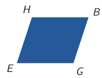
entonces  = 2  (prop. I.41)

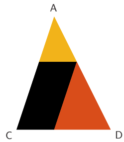
y como  =  (prop. I.38)

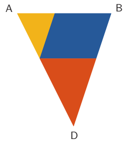
∴  = .

Q. E. D.

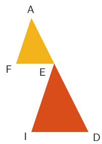


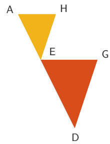
Los *complementos*  *y*  *de los paralelogramos que están sobre la diagonal de un paralelogramo son iguales.*



= 

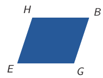
(prop. I.34)

y 

= 

(prop. I.34)

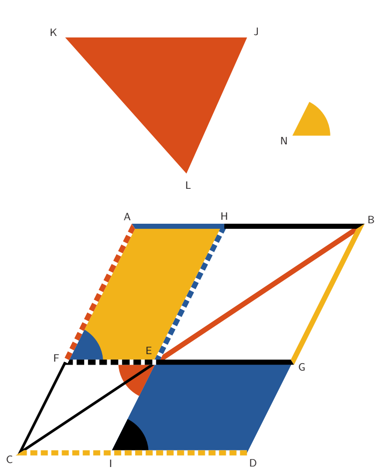
∴ 

= 

(ax. I.3).

Q. E. D.

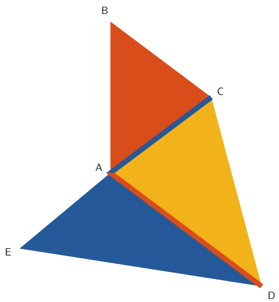
DADA *una linea recta ( ) construir un paralelogramo igual a un triángulo dado ( ) que tenga un ángulo igual a un ángulo dado ( ).*

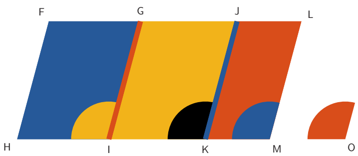


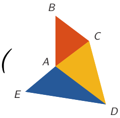
Construye = con = (prop. I.42) desde la prolongación de uno de sus lados .
Prolonga hasta , donde ∥ .
Prolonga hasta , traza ∥ hasta y prolonga .

Como = (prop. I.43)
y = (const.)
∴ = ;
∴ = = = (prop. I.29) y (const.).

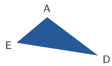
Q. E. D.



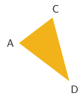


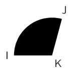
Construir *un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada (*  *) que tenga un ángulo igual a un ángulo dado (*  *).*

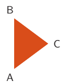
Traza  y  dividiendo la figura rectilínea en triángulos.

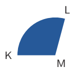
Construye  = 

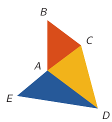
con  =  (prop. I.42)

Desde  construye  = 

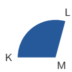
con  =  (prop. I.44)

Desde  construye  = 

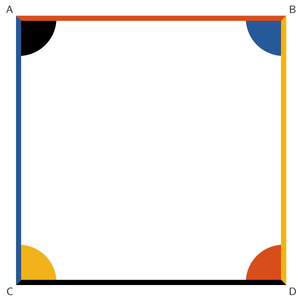
con  =  (prop. I.44)

∴  = 

Donde  es un paralelogramo (prop. I.29), (prop. I.14) y (prop. I.30);

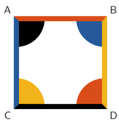
con  = .

Q. E. D.

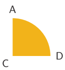
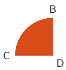


D ESDE *una línea recta dada (**) construir un cuadrado.*

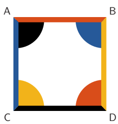
Traza  $=$  tal que  $\perp$ 
(prop. I.3) y (prop. I.11).
Traza  $\|$ ,
y traza  $\|$ .

Entonces el paralelogramo 
tiene  $=$  (const.)

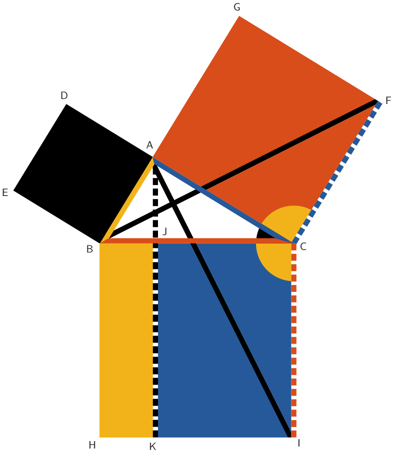
con  ángulo recto (const.)

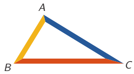
$\therefore$  $=$  también ángulo recto (prop. I.29),

entonces los lados y ángulos restantes también son iguales (prop. I.34).

$\therefore$  es un cuadrado (def. I.30).

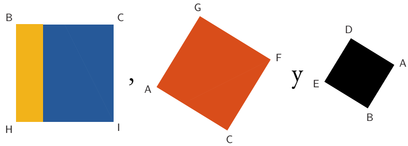
Q. E. D.



EN *un triángulo con un ángulo recto*  *el cuadrado de la hipotenusa*  *es igual a la suma de los cuadrados de los lados*  *y* .

Construye los cuadrados de:

,  y ;

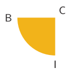


(prop. I.46).

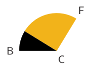
Traza  ||  (prop. I.31),

desde  traza ,

desde  traza .

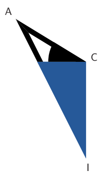
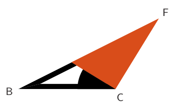
Como  =  (const.),

entonces al sumar :

 = ,

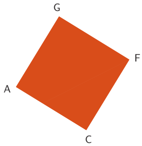
 = 

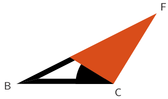
y  = ;

∴  = .

Como 

|| 

∴ 

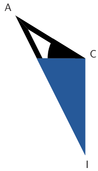
= 2 

,

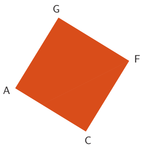
también 

|| 

∴ 

= 2 

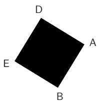
;

∴ 

= 

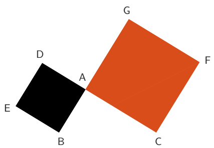
.

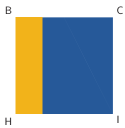
De la misma manera se puede demostrar que



= 

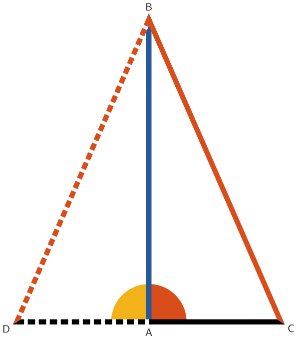
;

por lo tanto 

= 

.

Q. E. D.



SI el cuadrado de un lado ($\overline{BC}$) de un triángulo es igual a los cuadrados de los otros dos lados, ($\overline{AB}$ y $\overline{AC}$), el ángulo ($\angle BAC$) de ese triángulo es un ángulo recto.

Traza $\overline{AD} = \overline{AC}$ tal que $\overline{AD} \perp \overline{AC}$
(prop. I.3) y (prop. I.11)
y traza $\overline{BD}$.
Como $\overline{AD} = \overline{AC}$ (const.)
entonces $\overline{AD}^2 = \overline{AC}^2$;
$\therefore\ \overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2$
como $\overline{AD}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BD}^2$ (prop. I.47),
y $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ (hyp.)
entonces $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$,
$\therefore\ \overline{BD} = \overline{BC}$;
$\therefore\ \angle BAD = \angle BAC$ (prop. I.8),
por lo tanto $\angle BAC$ es un ángulo recto.

Q. E. D.